SAINS Volume 16, Nomor 1/ Januari 2016 : 44 – 48 ISSN : 1412-1093

EKUIVALENSI IDEMPOTEN PADA RING RICKART DAN RING BAER

Titik Suparwati[1]
[1] Program Studi Matematika Jurusan matematika FMIPA Universitas Cenderawasih, Jayapura

ABSTRACT

The research aims at identifying the characteristics of Rickart Rings and Baer Rings and to analyse relation between both of them. Moreover, properties in Idempotents Equivalence on Rickart Rings and Baer Rings will be proved.This research is performed by studying definisons and theoerems due to Rickart Rings and Baer Rings.

The result shows that every Baer Rings is Rickart Ring and Rickart Ring wich satisfies that **R** the set of idempotent-generated principal right ideals is a complete lattice is Baer Rings. The properties of Idempotents Equivalence on Rickart Ring and Baer Rings has been proved.

Keywords : Rickart Rings, Baer Rings, and Equivalence of Idempotent.

PENDAHULUAN

Di dalam Struktur Aljabar, dipelajari pengertian-pengertian dan contoh-contoh Ring. Ring Rickart dan Ring Baer merupakan bentuk-bentuk khusus dari suatu Ring. Dalam membahas tentang Ring Rickart dan Ring Baer, konsep annihilator memegang peranan penting. Lebih khusus lagi pada Ring Rickart dan Ring Baer juga menggunakan konsep idempoten. Pada tulisan ini akan dikaji tentang definisi-definisi dan teorema-teorema yang terkait dengan Ring Rickart dan Ring Baer.

Sebagai pembahasannya akan ditunjukkan bahwa jika ***A*** suatu Ring Baer maka ***A*** merupakan suatu Ring Rickart, sedangkan suatu Ring Rickart ***A*** akan merupakan Ring Baer jika ***R*** himpunan idempoten pembangun ideal utama kanan ***A*** maka ***R*** adalah Lattice lengkap. Pada tulisan ini, yang dibahas adalah Ring dengan unsur satuan, yaitu terdapat 1 di ***R*** sehingga untuk setiap *a* di ***R*** berlaku $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$.
Suatu Ring ***R*** dikatakan Ring Regular (Ring Von Neumann) apabila untuk setiap x di ***R*** terdapat y di ***R*** sehingga $xyx = x$. Sebagai contoh adalah Ring atas bilangan bulat modulo 4 (Z_4) dan Ring atas bilangan bulat modulo 6 (Z_6).

Untuk $Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ maka akan diperoleh $Ann\{\bar{0}\} = Z_6, Ann\{\bar{1}\} = \{\bar{0}\},\ Ann\{\bar{2}\} = \{\bar{0}, \bar{3}\},\ Ann\{\bar{3}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},\ Ann\{\bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{3}\},$
$dan\ Ann\{\bar{5}\} = \{\bar{0}\}$.
Dapat dibuktikan bahwa setiap annihilator di atas merupakan suatu ideal utama yang dibangun oleh suatu idempoten. Dari sifat yang dimiliki oleh Z_6 di atas akan didefinisikan suatu Ring Rickart.

Suatu ring Adisebut Ring Rickart apabila annihilator kanan (kiri) dari setiap elemennya merupakan ideal utama kanan (kiri) yang dibangun oleh suatu idempoten. Sedangkan ring Adisebut Ring Baer jika setiap subset *S* di A, maka annihilator kanan dari *S* merupakan utama kanan yang dibangun oleh suatu idempoten.

Idempoten e, f dari sebuah ring A dikatakan "ekuivalen" dalam A, ditulis $e \sim f$, jika memenuhi kondisi :

a) $eA \cong fA$, dimana keduanya adalah modul kanan atas A
b) $Ae \cong Af$, dimana keduanya adalah modul kiri atas A
c) terdapat $x, y \in A$ dengan $xy = e$ dan $yx = f$
d) terdapat $x \in eAf$, $y \in fAe$ dengan $xy = e$ dan $yx = f$

**Alamat korespondensi* :
Kampus Uncen Waena, Jurusan Matematika, Program Studi Sistem Informasi, Jayapura
e-mail: ti2k_parwati@yahoo.com

METODE PENELITIAN

Metode dalam penelitian ini adalah tinjauan pustaka.

KONSEP DASAR

Salah satu konsep dasar dalam Aljabar adaln Ring (Gelanggang). Ring merupakan struktur aljabar dengan dua operasi biner.

Definisi 1 (Adkin, 1992)

Ring $(R,+,\bullet)$ adalah himpunan R yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan $+: R \text{ X } R \to R$ dan operasi pergandaan $\bullet: R \text{ X } R \to R$ yang memenuhi kondisi berikut :

1. $(R,+)$ adalah grup abelian, yaitu :
   i. Untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $a+(b+c)=(a+b)+c$, (komutatif)
   ii. Terdapat 0 (nol) di R sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $a+0=0+a=a$, (elemen identitas)
   iii. Untuk setiap $a \in R$ terdapat $x \in R$ sehingga berlaku $a+x=x+a=0$, (elemen invers)
   iv. Untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a+b=b+a$, (hukum komutatif)
2. Untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $a \bullet (b \bullet c)=(a \bullet b) \bullet c$, ($\bullet$ assosiatif)
3. Untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $a \bullet (b+c)=a \bullet b + a \bullet c$ (distributif kiri) dan $(b+c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$ (distributif kiri).

Ring dengan satu elemen disebut Ring nol, karena setiap ring memuat elemen nol. Jika untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $ab=ba$ maka R disebut Ring komutatif.
Dalam hal terdapat elemen $1 \in R$ sehingga $a \bullet 1 = a$ $(1 \bullet a = a)$ untuk setiap a di R maka 1 disebut elemen identitas (*unity*) kanan (kiri) dari R.

Misalkan R ring dengan unity, jika $ab=1$, dengan $a,b \in R$ maka b disebut invers kanan a dan a disebut invers kiri b. Jika elemen a di R mempunyai invers kanan b atau $ab=1$ dan a invers kanan c atau $ac=1$, maka diperoleh $b=c$. Dalam hal ini a disebut elemen invertibel atau unit dari R.

Definisi 2 (Goodearl, 1994)

Suatu ring R disebut Ring Regular (Ring Von Neumann) apabila untuk setiap x di Rterdapat y di Rsehingga $xyx=x$.

Definisi Ring Reguler di atas dilatar belakangi oleh sifat Lapangan yang mempunyai elemen satuan, yaitu terdapat 1 di R sehingga untuk setiap a di R berlaku $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$. Sehingga diperoleh bahwa $aa^{-1}a=(aa^{-1})a=1 \bullet a = a$.

Definisi 3 (Bhattacharya dan Jain, 1977)

Misalkan R adalah Ring komutatif dengan elemen satuan, $x \in R$ disebut pembagi nol jika terdapat elemen tak nol y di R sehingga $yx=0$.

Ring komutatif dengan elemen satuan disebut daerah integral jika R tidak mempunyai pembagi nol, kecuali nol.

Definisi 4 (Bhattacharya dan Jain, 1977)

Misalkan R Ring dan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$. Himpunan S disebut subring dari R jika S juga merupakan ring terhadap operasi yang sama dengan R.

Selain itu secara singkat diperoleh suatu sifat dari subring seperti dalam teorema berikut :

Teorema 1 (Fraleigh, 1994)

Misalkan R Ring dan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$. S disebut subring dari R jika dan hanya jika : Untuk setiap $a,b \in S$ berlaku $a-b \in S$ dan $ab \in S$

Definisi 5 (Bhattacharya dan Jain, 1977)

Misalkan R adalah Ring. Suatu himpunan tak kosong $S \subset R$ disebut ideal dalam ring R jika :

i. Untuk setiap $a,b \in S$ berlaku $a-b \in S$
ii. Untuk setiap $a \in S$ dan untuk setiap $r \in R$ berlaku $ar \in S$ dan $ra \in S$.

Definisi 6 (Fraleigh, 1994)

Misalkan R adalah Ring komutatif dengan elemen satuan dan $a \in R$, ideal $\{ra : r \in R\}$ adalah ideal utama yang dibangun oleh a, dinotasikan dengan $\langle a \rangle$. Suatu ideal N dari Ring R adalah ideal utama jika $N=\langle a \rangle$ untuk $a \in A$.

Definisi 7 (Adkins, 1992)

Misalkan S subset dari Ring R dan $S \neq \emptyset$, himpunan $r(S) = \{x \in R | sx = 0, \forall s \in S\}$ disebut annihilator kanan dari S dan $l(S) = \{x \in R | xs = 0, \forall s \in S\}$ disebut annihilator kiri dari S.

Dari definisi di atas, jelas bahwa $0 \in r(S)$ dan juga $0 \in l(S)$, sehingga $r(S) \neq \emptyset$ dan $l(S) \neq \emptyset$. Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa $r(S)$ dan $l(S)$ adalah ideal di R.

Definisi 8 (Adkins, 1992)

Misalkan R ring dengan elemen satuan. Elemen e disebut elemen idempoten jika $e^2 = e$.

Definisi 9 (Fraleigh, 1998)

Misalkan R dan S adalah Ring . Fungsi $f: R \to S$ disebut homomorphisma ring jika dan hanya jika :

i. $f(a+b) = f(a) + f(b), \quad \forall a, b \in R$
ii. $f(ab) = f(a)f(b), \quad \forall a, b \in R$

Homomorphisma f yang bijektif disebut Isomorphisma, sehingga f merupakan isomorphisma dari R ke S

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini diuraikan tentang Ring Rickart dan Ring Baer.Selanjutnya diuraikan juga tentang karakteristik Ring Ricart dan Ring Baer serta karakteristik keduanya.

Definisi 10 (Maeda,S, 1958:508):

Ring Rickart adalah ring yang annihilator kanan (kiri) dari setiap elemennya merupakan ideal utama kanan (kiri) yang dibangun oleh suatu idempoten.

Selanjutnya jika Aadalah Ring Rickart, maka untuk setiap $x \in A$ dapat didefinisikan :

$$\{x\}^l = A(1 - e_x)$$
$$\{x\}^r = (1 - f_x)A$$

dengan $e_x\ dan\ f_x$adalah idempoten dari x.

Contoh 1 (Goodreal, 1994) :

Setiap Ring Regular (Von Neumann) adalah Ring Rickart

Bukti :

Misalkan A suatu Ring Regular, maka untuk setiap $x \in A$ terdapat sebarang $y \in A$ sehingga $x = xyx$.

Misalkan $e = xy$ akan diperoleh e idempoten, $xA = eA$ dan

$$\{x\}^l = \{xA\}^l = \{eA\}^l = A(1 - e)$$

Secara sama, yaitu :

Misalkan $f = yx$ akan diperoleh f idempoten, $Ax = Af$ dan

$$\{x\}^r = \{Ax\}^r = \{Af\}^r = (1 - f)$$

sehingga,

$$\{x\}^{lr} = \{A(1 - e)\}^r = \{1 - e\}^r = eA = xA$$

dan

$$\{x\}^{rl} = \{(1 - f)A\}^l = \{1 - f\}^l = Af = Ax$$

Dengan kata lain A adalah Ring Rickart.

Definisi 11 (Kaplansky, 1968:3)

Misalkan A ring. A disebut Ring Baer jika setiap annihilator kanan dari setiap subset S di dalam A merupakan ideal utama kanan yang dibangun oleh suatu idempoten.

Teorema 2

Jika A ring, **R** himpunan idempoten pembangun ideal utama kanan. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

i. A adalah Ring Baer
ii. A adalah Ring Rickart dan **R** adalah lattice lengkap.

Dari teorema di atas dapat disimpulkan bahwa jika A suatu Ring Baer maka A merupakan suatu Ring Rickart, sedangkan suatu Ring Ricart A akan merupakan Ring Baer jika **R** himpunan idempoten pembangun ideal utama kanan maka **R** adalah lattice lengkap.

Selanjutnya diuraikan beberapa fakta dan karakteristik tentang Ring Rickart dan Ring Baer sebagai berikut :

Definisi 12: Jika A adalah Ring dan $e \in A$ idempoten, Ring eAe (dengan satuan $e \in A$) disebut **corner** dari A.

Sifat 1 : Setiap *corner* dari Ring Baer adalah Ring Baer.

Dari sifat di atas, untuk menunjukkan setiap coner dari Ring Baer adalah Ring Baer ekuivalen dengan menunjukkan bahwa jika A adalah Ring Baer dan $e \in A$ idempoten maka eAe adalah Ring Baer.

Sifat 2 : Setiap *corner* dari Ring Rickart adalah Ring Rickart.

Dari sifat di atas, untuk menunjukkan setiap coner dari Ring Rickart adalah Ring Rickart ekuivalen dengan menunjukkan bahwa jika A adalah Ring Rickart dan $e \in A$ idempoten maka eAe adalah Ring Rickart.

Akibatnya : Setiap *corner* dari Ring Reguler adalah Ring Reguler

Bukti :

Diketahui A adalah Ring Reguler dan $e \in A$ idempoten. Akan dibuktikan bahwa eAe adalah Ring Reguler.
Diambil sebarang $x \in eAe$, dipilih suatu $y \in A$ dengan $x = xyx$, akan diperoleh $xyx = (xe)y(ex) = x(eye)x$
Dengan menggantikan y dengan eye maka dapat dianggap bahwa $y \in eAe$. Hal ini mengakibatkan untuk sebarang $x \in eAe$ terdapat $y \in eAe$ sehingga $x = xyx$.

Dengan kata lain eAe adalah Ring Reguler.
Jadi terbukti bahwa *corner* dari Ring Reguler adalah Ring Reguler.

Definisi 13 (Adkins, 1992:111)

Misalkan R adalah Ring. ***Center*** dari Ring R didefinisikan sebagai

$$C(R) = \{(a \in R |\ ab = ba, \text{untuk setiap } b \in R)\}$$

Sifat 3 : *Center*dari suatu Ring Baer adalah Ring Baer.

Sifat 4 :*Center*dari suatu Ring Rickart adalah Ring Rickart.

Lebuh lanjut dibicarakan tentang Ekuivalensi dari elemen-elemen idempoten pada Ring Rickart dan Ring Baer.

Proposisi 1: Misalkan A adalah sebuah ring dan e, f adalah elemen-elemen idempoten. Pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalensi :

a. $eA \cong fA$, dimana keduanya adalah modul kanan atas A.
b. $Ae \cong Af$, dimana keduanya adalah modul kiri atas A.
c. terdapat $x, y \in A$ dengan $xy = e$ dan $yx = f$.
d. terdapat $x \in eAf, y \in fAe$ dengan $xy = e$ dan $yx = f$.

Definisi 14

Idempoten e, f dari suatu ring A dikatakan "ekuivalen" (ekuivalen secara aljabar) dalam A, ditulis $e \overset{a}{\sim} f$, jika memenuhi kondisi 3.4.2 (Notasi $\overset{a}{\sim}$ sering dibaca "ekuivalensi idempoten).

Proposisi 2: Dengan menggunakan notasi seperti dalam **Proposisi 1.d**,pemetaan $s \to ysx$ adalah sebuah isomorphisma ring $\varphi: eAe \to fAf$ dimana invers pemetaannya adalah $t \to xty$

Selanjutnya untuk setiap elemen idempoten $g \le e$ kita mempunyai $g \overset{a}{\sim} \varphi(g)$.

Dari Proposisi di atas dapat disimpulkan bahwa misalkan diketahui $\varphi: eAe \to fAf$ dengan definisi $s \in eAe \to \varphi(s) = ysx \in fAf$ adalah suatu isomorphisma, jika diambil sebarang $g \le e$ dengan g adalah idempoten maka diperoleh bahwa $g \overset{a}{\sim} \varphi(g)$.

Proposisi 3: Relasi ekuivalensi dari elemen-elemen idempoten (ekuivalensi idempoten) dalam sebuah ring A memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

a. Jika $e \overset{a}{\sim} 0$ maka $e = 0$.
b. Jika $e \overset{a}{\sim} f$ maka $ue \overset{a}{\sim} uf$, untuk setiap elemen idempoten pusat u.
c. Jika $e \overset{a}{\sim} f$ dan jika $e_1, e_2, \dots, e_n$ adalah pasangan idempoten orthogonal dengan $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, maka terdapat pasangan idempoten orthogonal $f_1, f_2, \dots, f_n$ sedemikian hingga $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ dan $e_i \overset{a}{\sim} f_i$ untuk setiap *i* .
d. Jika $e_1, e_2, \dots, e_n$ adalah pasangan idempoten orthogonal dengan jumlah e, $f_1, f_2, \dots, f_n$ adalah pasangan idempoten orthogonal dengan jumlah f, dan jika $e_i \overset{a}{\sim} f_i$ untuk setiap *i* maka $e \overset{a}{\sim} f$.

e. e dan f dikatakan "similar" jika dan hanya jika $e \overset{a}{\sim} f$ dan $1-e \overset{a}{\sim} 1-f$.

f. Jika $eA = fA$ maka e dan f dikatakan "similar"

KESIMPULAN

Dari uraian di atas dapt diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Jika A ring, **R** himpunan idempoten pembangun ideal utama kanan. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :
   i. A adalah Ring Baer
   ii. A adalah Ring Rickart dan **R** adalah lattice lengkap.
2. Setiap *corner* dari Ring Baer adalah Ring Baer dan Setiap *corner* dari Ring Rickart adalah Ring Rickart.
3. *Center* dari suatu Ring Baer adalah Ring Baer dan *Center* dari suatu Ring Rickart adalah Ring Rickart.
4. Relasi ekuivalensi dari elemen-elemen idempoten (ekuivalensi idempoten) dalam sebuah ring A memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :
   a. Jika $e \overset{a}{\sim} 0$ maka $e = 0$.
   b. Jika $e \overset{a}{\sim} f$ maka $ue \overset{a}{\sim} uf$, untuk setiap elemen idempoten pusat u.
   c. Jika $e \overset{a}{\sim} f$ dan jika $e_1, e_2, \dots, e_n$ adalah pasangan idempoten orthogonal dengan $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, maka terdapat pasangan idempoten orthogonal $f_1, f_2, \dots, f_n$ sedemikian hingga $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ dan $e_i \overset{a}{\sim} f_i$ untuk setiap *i* .
   d. Jika $e_1, e_2, \dots, e_n$ adalah pasangan idempoten orthogonal dengan jumlah e, $f_1, f_2, \dots, f_n$ adalah pasangan idempoten orthogonal dengan jumlah f, dan jika $e_i \overset{a}{\sim} f_i$ untuk setiap *i* maka $e \overset{a}{\sim} f$.
   e. e dan f dikatakan "similar" jika dan hanya jika $e \overset{a}{\sim} f$ dan $1-e \overset{a}{\sim} 1-f$.
   f. Jika $eA = fA$ maka e dan f dikatakan "similar" .

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W.A & Weintreub, S.H, *Algebra An Approach via Module Theory,* Springer-Verlag, New York, 1992.

Berberian, S.K, *Baer Ring and Baer*-Ring,* Springer-Verlag, New York, 1972.

Bhattacharya, P.B, Jainn, S.K and Nagpaul, S.R, *Basic Abstract Algebra*, *2nd edition*, 1994.

Fraleigh, J.B, *A first Course in Abstract Algebra, 6th edition, 2000.*

Goodearl, K.R, *Von Neumann Regular Rings*, Pitman, London, 1979.

Maeda, S, *On the Laticce of projections of a Baer Ring* , J.Sci.Hiroshima, Univ.Ser.A22, 1958.

Kaplansky, *Rings of Operators* , Benjamin, New York, 1968.

____________, *The Centre of a Corner of a Ring*, J.Algebra 71, 1981.

____________, *On the Ring whose principal right ideal generated by idempotents form a Lattice* , J.Sci.Hiroshima, Univ.Ser.A24, 1960.