

## Spektrum Matriks Detour Graf Teratur

Thasya Alfin<sup>1</sup>, Westy B. Kawuwung<sup>2</sup>, Tiku Tandianga<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika Universitas Cenderawasih

E-mail: [westykawuwung@gmail.com](mailto:westykawuwung@gmail.com)

Article Info	Abstract
<b>Article History</b> Received: 16/08/2023 Revised: 15/09/2023 Published: 02/10/2023	A regular graph is a graph where each vertex has the same degree, that is there are the same number of edges connected to it. This study examines the spectrum of the detour matrix of a regular graph. The research was conducted using the literature review method, namely by studying references related to the topic being studied. The aim of this research is, firstly to find out the results of the matrix detour spectrum of an r-regular graph that has n vertices with $n = r + 1$ for $1 \leq r \leq 6$ . The second objective is to find out the general formula of the spectrum of a regular graph detour matrix. In order to obtain the result we first draw an r-regular simple graph, then we determine the detour matrix of the graph. From the detour matrix that has been determined then we find the spectrum by determine the eigenvalues and their multiplicity. Then, from the results that have been obtained, a pattern can be noticed to determine the general form of the detour matrix spectrum of a regular graph. From the research that has been done, it can be concluded that the spectrum of the detour matrix of a simple r-regular graph with $n = r + 1$ for $1 \leq r \leq 6$ is $spec_D = \begin{pmatrix} r^2 & -r \\ 1 & r \end{pmatrix}$
<b>Keywords:</b> Spektrum; Matriks; Matriks Detour; Graf teratur	

Artikel Info	Abstrak
<b>Sejarah Artikel</b> Diterima: 16/08/2023 Direvisi: 15/09/2023 Dipublikasi: 02/10/2023	Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya berderajat sama, yaitu banyaknya sisi yang terhubung dengan setiap simpul sama. Penelitian ini mengkaji spektrum matriks detour dari graf teratur. Penelitian dilakukan dengan menggunakan metode studi pustaka yaitu dengan mempelajari referensi yang berkaitan dengan topik yang sedang dikaji. Tujuan dari penelitian ini adalah, pertama-tama untuk mengetahui hasil spektrum detour matriks dari graf r-teratur yang memiliki n simpul dengan $n = r + 1$ untuk $1 \leq r \leq 6$ . Tujuan kedua adalah untuk mengetahui rumus umum spektrum matriks detour graf teratur. Untuk mendapatkan hasilnya, pertama-tama kita menggambar graf r-teratur sederhana, kemudian kita menentukan matriks detour dari graf tersebut. Dari matriks detour yang telah ditentukan kemudian dicari spektrumnya dengan menentukan nilai eigen dan multiplisitasnya. Kemudian dari hasil yang telah diperoleh dapat diketahui suatu pola untuk menentukan bentuk umum spektrum matriks detour dari suatu graf teratur. Dari penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa spektrum matriks detour dari graf r-teratur sederhana dengan $n = r + 1$ untuk $1 \leq r \leq 6$ adalah $spec_D = \begin{pmatrix} r^2 & -r \\ 1 & r \end{pmatrix}$ .
<b>Kata kunci:</b> Spektrum; Matriks; Matriks Detour; Graf teratur	

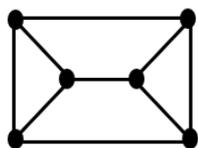
### I. PENDAHULUAN

Sebuah graf adalah suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut simpul (*vertex*) dan suatu himpunan pasangan tak berurutan dari simpul-simpul tersebut yang

disebut sisi (*edge*). Sebuah graf dilambangkan dengan  $G(V, E)$ . Notasi  $V(G)$  menyatakan himpunan simpul di graf  $G$  dan  $E(G)$  menyatakan himpunan sisi pada graf  $G$ . Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama

disebut sisi ganda, dan sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut loop. Graf yang tidak mengandung loop dan sisi ganda disebut graf sederhana. Terdapat beberapa jenis graf dalam ilmu matematika, dan graf teratur merupakan salah satunya. Suatu graf dikatakan teratur (*regular*) jika semua simpulnya memiliki derajat yang sama, yaitu banyaknya sisi yang terhubung ke setiap simpul pada graf tersebut adalah sama. Jika derajat setiap simpul adalah  $r$ , graf  $G$  dikatakan graf teratur dengan derajat  $r$  atau disebut juga graf  $r$ -teratur (Rahayuningsih, 2018).

Contoh graf teratur dengan derajat 3 atau disebut juga graf 3-teratur dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf 3-teratur

Salah satu kasus yang dapat dikaji dalam graf teratur adalah dengan mencari nilai spektrumnya. Spektrum (*Spectrum*) dari sebuah graf, menurut definisi, adalah matriks yang memuat nilai-nilai eigen beserta banyaknya multiplisitas dari nilai eigen tersebut (Brouwer dan Haemers, 2012). Nilai eigen tidak hanya dapat diaplikasikan dalam bidang matematika, tetapi juga dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, diantaranya untuk menganalisis sinyal suara, gerak harmonik, getaran suatu bangunan, dan analisis wajah (Wadji dan Sugiantara, 2018). Penggunaan matriks detour dapat diterapkan untuk menentukan spektrum dari sebuah graf. Topik tentang spektrum detour dari graf sudah diteliti oleh beberapa peneliti matematika, seperti penelitian Khusna (2011) yang meneliti tentang spektrum matriks detour dari graf komplit dengan  $n$  titik ( $K_n$ ). Fokus dari penelitian yang dilakukannya adalah untuk menentukan hasil dan bentuk umum spektrum matriks detour dari graf komplit. Setelah 3 tahun berselang Nafisah (2014) melakukan penelitian tentang spektrum detour graf dari grup dihedral  $D_{2n}$ , untuk mengetahui rumusan umum spektrum detour dari graf tidak komutatif grup dihedral. Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Abdy dkk. (2020) terfokus pada penentuan spektrum matriks detour dari graf roda dengan  $n + 1$  titik  $W_n$ . Penelitian

tentang spektrum matriks detour dari graf teratur belum pernah dilakukan sebelumnya karena alasan inilah, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang spektrum matriks detour dari graf teratur. Tujuan dari penelitian ini adalah, pertama-tama untuk mengetahui hasil spektrum detour matriks dari graf  $r$ -teratur yang memiliki  $n$  simpul dengan  $n = n = r + 1$  untuk  $1 \leq r \leq 6$ . Tujuan kedua adalah untuk mengetahui rumus umum spektrum matriks detour graf teratur.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan metode kajian pustaka, yaitu dengan mempelajari beberapa referensi yang memuat materi yang berkaitan dengan masalah yang dibahas. Referensi yang dipakai adalah buku, jurnal ilmiah maupun artikel dari internet. Pada penelitian ini juga digunakan *software* maple untuk menentukan spektrum matriks detour dari graf teratur .

Langkah pertama dari penelitian ini adalah menggambar graf  $r$ -teratur sederhana yang memiliki  $n$  simpul dengan  $n = r + 1$  untuk nilai-nilai  $1 \leq r \leq 6$ . Selanjutnya ditentukan matriks detour dari graf-graf tersebut. Dari matriks detour yang telah ditentukan kemudian dicari spektrumnya dengan menentukan nilai eigen dan multiplisitasnya. Kemudian dari hasil yang telah diperoleh dapat diketahui suatu pola untuk menentukan bentuk umum spektrum matriks detour dari suatu graf teratur.

## II. HASIL DAN PEMBAHASAN

### A. Hasil Penelitian

Spektrum (*Spectrum*) dari graf terbatas  $G$  didefinisikan sebagai matriks dari nilai-nilai eigen beserta banyaknya multiplisitas dari nilai eigen tersebut, jika nilai eigen dari matriks tersebut adalah  $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n-1}$  dan banyak multiplisitasnya adalah  $m(\lambda_0), m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_{n-1})$  maka spektrum dari graf  $G$  dapat ditulis

$$spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Misalkan  $v(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  adalah himpunan simpul dari graf terhubung  $G$ . Spektrum graf biasa dibentuk oleh nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan. Matriks detour  $D$  dari sebuah graf terhubung  $G$  dinotasikan dengan  $D(G)$ . Nilai

eigen dari  $D(G)$  membentuk spektrum  $G$  yang dilambangkan dengan  $spec_D(G)$ . Karena matriks detour adalah *symmetric*, semua nilai eigen  $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$  adalah real, maka  $D$ -spektrum dapat ditulis sebagai

$$spec_D(G) = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

Pembahasan pada penelitian ini dibatasi pada graf  $r$ -teratur yang memiliki  $n$  simpul dengan dimana  $1 \leq r \leq 6$ . Maka berdasarkan pembahasan spektrum matriks detour graf teratur diperoleh hasil dan pola yang dipaparkan pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1** pola spektrum matriks detour graf  $r$ -teratur

No	Graf $r$ – Teratur	$n$	Spektrum Matriks Detour
1	1 – teratur	2	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
2	2 – teratur	3	$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
3	3 – teratur	4	$\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
4	4 – teratur	5	$\begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
5	5 – teratur	6	$\begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
6	6 – teratur	7	$\begin{bmatrix} 36 & -6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

## B. Pembahasan

Tabel 1 memperlihatkan sebuah pola yang menjadi dasar untuk menentukan dugaan bentuk umum yang dituangkan dalam teorema sebagai berikut:

### Teorema 1

Misalkan  $G$  adalah graf  $r$ -teratur dengan  $n$  simpul di mana  $n = r + 1$  dan  $D$  adalah matriks Detour dari  $G$ , maka spektrum dari  $D$  adalah

$$spec_D = \begin{bmatrix} r^2 & -r \\ 1 & r \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks detour dari graf  $r$ -teratur dengan  $n$  simpul adalah sebagai berikut :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & r & \dots & r & r & r \\ r & 0 & \dots & r & r & r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r & r & \dots & 0 & r & r \\ r & r & \dots & r & 0 & r \\ r & r & \dots & r & r & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian ditentukan nilai eigen dengan menggunakan polinomial karakteristik,

$$\det(D - \lambda I) = 0$$

Diperoleh nilai eigen untuk graf  $r$ -teratur, dengan  $n$  simpul adalah :

$$\lambda = r^2 \text{ atau } \lambda = -r$$

Dari nilai eigen yang telah diperoleh, ditentukan basis dari ruang vektor eigen, sebagai berikut:

$$(D - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & r & \dots & r & r & r \\ r & -\lambda & \dots & r & r & r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r & r & \dots & -\lambda & r & r \\ r & r & \dots & r & -\lambda & r \\ r & r & \dots & r & r & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi nilai-nilai eigen  $\lambda = r^2$  dan  $\lambda = -r$  ke persamaan di atas diperoleh  $\lambda_1 = r^2$  terbukti memiliki 1 basis ruang vektor eigen dan untuk  $\lambda_2 = -r$  terbukti memiliki  $r$  basis ruang vektor eigen. Jadi spektrum matriks detour dari graf sederhana  $r$ -teratur dengan  $n$  simpul dengan  $n = r + 1$  adalah

$$spec_D = \begin{bmatrix} r^2 & -r \\ 1 & r \end{bmatrix}$$

### III. KESIMPULAN DAN SARAN

#### A. Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diperoleh dalam penelitian ini, dapat disimpulkan beberapa hal yaitu:

1. Berikut merupakan hasil-hasil yang telah diperoleh dari spektrum matriks detour graf  $r$ -teratur dengan  $n = r + 1$  dan  $1 \leq r \leq 6$

a. Diketahui nilai eigen dari matriks detour graf 1-teratur dengan  $n = 2$  yaitu  $\lambda = 1$  memiliki satu basis dan  $\lambda = -1$  juga memiliki satu basis ruang vektor eigen, maka spektrum matriks detour graf 1-teratur dengan 2 simpul yaitu:

$$spec_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Untuk graf 2-teratur dengan  $n = 3$  diperoleh  $\lambda = 4$  yang memiliki satu basis ruang vektor dan  $\lambda = -2$  dengan dua basis ruang vektor eigen. Sehingga spektrum matriks detour dari graf 2-teratur dengan 3 simpul yaitu:  $spec_D =$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c. Nilai eigen dari matriks detour graf 3-teratur dengan  $n = 4$  yaitu,  $\lambda = 9$  dengan satu basis ruang vektor eigen dan untuk  $\lambda = -3$  memiliki tiga basis ruang vektor eigen. Sehingga diperoleh spektrum matriks detour graf 3-teratur dengan 4 simpul yaitu:  $spec_D =$

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d. Matriks detour dari graf 4-teratur dengan  $n = 5$  menghasilkan nilai eigen  $\lambda = 16$  dengan satu basis ruang vektor eigen dan  $\lambda = -4$  dengan empat basis dari ruang vektor eigen. maka spektrum matriks detour graf 4-teratur dengan 5 simpul yaitu:  $spec_D =$

$$\begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e. Untuk graf 5-teratur dengan  $n = 6$  diperoleh  $\lambda = 25$  terdapat satu basis ruang vektor dan  $\lambda = -5$  dengan lima basis ruang vektor eigen. Sehingga spektrum matriks detour dari graf 5-teratur dengan 6 simpul yaitu:  $spec_D =$

$$\begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

f. Graf 6-teratur dengan  $n = 7$  diperoleh nilai eigen yaitu  $\lambda = 36$  dengan satu basis ruang vektor eigen, dan untuk  $\lambda = -6$  memiliki enam basis ruang vektor eigen. Sehingga spektrum

matriks detour graf 6-teratur dengan 7 simpul

$$yaitu: spec_D = \begin{bmatrix} 36 & -6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Kemudian untuk bentuk dari spektrum matriks detour dari graf sederhana  $r$ -teratur dengan  $n$  simpul dengan  $n = r + 1$ , diperoleh hasil sebagai berikut:

$$spec_D = \begin{bmatrix} r^2 & -r \\ 1 & r \end{bmatrix}$$

#### B. Saran

Penelitian tentang graf dan presentasinya berupa matriks telah menjadi perhatian dari banyak peneliti matematika, namun aplikasinya belum banyak diteliti. Bagi yang tertarik dapat melakukan penelitian tentang aplikasi matriks detour dari graf.

### DAFTAR RUJUKAN

Abdy, M., Syam, R., & Putri, A. M. (2020). Spectrum Matriks Detour dari Graf Roda dengan  $n+1$  titik wn. *Journal of Mathematics, Computation, and Statistic*, 32-40.

Anton, H., & Rorres, C. (2004). *Aljabar linear Elementer Versi Aplikasi edisi kedelapan jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Ayyaswamy, S., & Balachandran, S. (2010). On detour of Some Graphs. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 529-531.

Brouwer, Andries, E., & Haemers, W. (2012). *Spectra of Graphs*. New York: Springer-verlag.

Harary, F. (1969). *Graph Theory*. New York: Addison-Wasley.

Khusna, L. (2010). *Spectrum Matriks Detour dari Graf Komplit dengan n titik kn*. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.

Lipschutz, S., & Lipson, M. (2009). *Discrete Mathematics third edition*. USA: McGraw-Hill.

Miftahurrahma. (2016). *Aplikasi Teori Graf Dalam Lalu Lintas*. Makassar: Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.

- Wadji, M., & Sugiantara, J. (2018). Pemanfaatan Teknik Pengenalan Wajah Berbasis Opencv untuk Sistem Informasi Pencatatan Kehadiran Dosen. *Jurnal Informatika dan Teknologi*, 96 – 106. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim .
- Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit edisi keempat*. Bandung: Penerbit Informatika Bandung. Noviliza, A. (2019). *Modul Pembelajaran Maple Aplikasi Komputer Matematika*. Sumatera Barat: Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Sumatera Barat .
- Nafisah, M. (2014). *Spectrum Matriks detour Graf Non-Commuting dari Grup Dihedral*. Malang: Rahayu, N. (2018). *Teori Graph dan Penerapannya*. Malang: Universitas Wisnuwardhana Press Malang.